一个包含伪 Smarandache 函数及 Smarandache 可乘函数的方程

闫晓霞

(汉中职业技术学院, 陕西 汉中 723000)

摘 要: 对任意正整数 n, 著名的伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 n 整除 $\frac{m(m+1)}{2}$, 或者 $Z(n)=\min\left\{m:\ m\in\mathbb{N},\ n\mid\frac{m(m+1)}{2}\right\}$, 其中 $\mathbb{N}$ 表示所有正整数之集合. 而 Smarandache 可乘函数 $U(n)$ 定义为 $U(1)=1$, 当 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为 n 的标准素因数分解式时, 定义 $U(n)=\max\{\alpha_1p_1,\ \alpha_2p_2,\ \cdots,\ \alpha_sp_s\}$. 本文的主要目的是利用初等方法研究方程 $Z(n)=U(n)$ 及 $Z(n)+1=U(n)$ 的可解性, 并获得了这两个方程的所有正整数解.

关 键 词: 伪 Smarandache 函数; Smarandache 可乘函数; 方程; 正整数解

中图分类号: O156.4 **文献标识码**: A **文章编号**: 1008-5513(2008)02-0372-03

1 引言及结论

对任意正整数 n, 著名的伪 Smarandache 函数 $Z(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 n 整除 $\frac{m(m+1)}{2}$, 或者 $Z(n)=\min\left\{m:\ m\in\mathbb{N},\ n\mid\frac{m(m+1)}{2}\right\}$, 其中 $\mathbb{N}$ 表示所有正整数之集合. 从 $Z(n)$ 的定义容易推出 $Z(n)$ 的具体值, 例如 $Z(n)$ 的前几项为 $Z(1)=1$, $Z(2)=3$, $Z(3)=2$, $Z(4)=7$, $Z(5)=4$, $Z(6)=3$, $Z(7)=6$, $Z(8)=15$, $Z(9)=8$, $Z(10)=4$, $Z(11)=10$, $Z(12)=8$, $Z(13)=12$, $Z(14)=7$, $Z(15)=5$, $Z(16)=31$, $\cdots$. 关于 $Z(n)$ 的初等性质, 许多学者进行了研究, 获得了不少有意义结果 [1-4]. 这里我们列出下面几条简单性质:

(a) 对任意正整数 α 及奇素数 p, $Z(p^\alpha)=p^\alpha-1$;

(b) 对任意正整数 α, $Z(2^\alpha)=2^{\alpha+1}-1$;

(c) $Z(n)$ 不是加性函数, 即就是 $Z(m+n)=Z(m)+Z(n)$ 不恒成立;

(d) $Z(n)$ 不是可乘函数, 即就是 $Z(m\cdot n)=Z(m)\cdot Z(n)$ 不恒成立.

现在我们定义另一个算术函数 $U(n)$ 如下 $U(1)=1$. 当 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为 n 的标准素因数分解式时, 定义

$$U(n)=\max\{\alpha_1p_1,\ \alpha_2p_2,\ \cdots,\ \alpha_sp_s\}$$

这个函数有时也被称为 Smarandache 可乘函数. 之所以这样称是因为任意一个算数函数 $f(n)$, 如果它满足性质 $f(1)=1$, 当 $n>1$ 且 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为 n 的标准分解式时,

$$f(n)=\max\left\{f\left(p_1^{\alpha_1}\right),\ f\left(p_2^{\alpha_2}\right),\ \cdots,\ f\left(p_s^{\alpha_s}\right)\right\}$$

收稿日期: 2007-11-02 .

基金项目: 国家自然科学基金 (10671155).

作者简介: 闫晓霞 (1970-), 女, 讲师, 研究方向: 基础数学的教学与研究.

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

把这样的函数均称为 Smarandache 可乘函数. 关于它的简单性质, 虽然我们至今知道的不多, 但是也有不少人进行过研究, 获得了一些有理论价值的研究成果, 参阅文 [5-6]. 例如沈虹在文 [5] 中证明了渐近公式

$$\sum_{n\leq x}(U(n)-P(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right)$$

其中 $\zeta(s)$ 表示 Riemann zeta- 函数, $P(n)$ 表示 n 的最大素因子.

本文的主要目的是利用初等方法研究方程 $Z(n)=U(n)$ 及 $Z(n)+1=U(n)$ 的可解性, 并获得了这两个方程的所有正整数解, 具体地说也就是证明了下面的：

定理 1 对任意正整数 $n>1$, 函数方程

$$Z(n)=U(n)$$

成立当且仅当 $n=p\cdot m$, 其中 p 为奇素数, m 为 $\frac{p+1}{2}$ 的任意大于 1 的因数. 即就是 $m\mid\frac{p+1}{2}$ 且 $m>1$.

定理 2 对任意正整数 n, 函数方程

$$Z(n)+1=U(n)$$

成立当且仅当 $n=p\cdot m$, 其中 p 为奇素数, m 为 $\frac{p-1}{2}$ 的任意正因数. 即就是 $m\mid\frac{p-1}{2}$.

显然我们的定理彻底解决了方程 $Z(n)=U(n)$ 及 $Z(n)+1=U(n)$ 的可解性问题. 也就是证明了这两个方程有无穷多个正整数解, 并给出了它们每个解的具体形式！特别在区间 [1, 100] 中, 方程 $Z(n)=U(n)$ 有 9 个解, 它们分别是 $n=1$, 6, 14, 15, 22, 28, 33, 66, 91. 而方程 $Z(n)+1=U(n)$ 在区间 [1, 50] 中有 19 个解, 它们分别是 $n=3$, 5, 7, 10, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 26, 29, 31, 34, 37, 39, 41, 43, 47.

2 定理的证明

这节我们利用初等方法给出定理的直接证明. 首先证明定理 1. 事实上当 $n=1$ 时, 方程 $Z(n)=U(n)=1$ 成立. 当 $n=2$, 3, 4, 5 时, 显然 n 不满足方程 $Z(n)=U(n)$. 于是假定 $n\geq 6$ 且满足方程 $Z(n)=U(n)$, 不妨设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ 为 n 的标准素因数分解式, 并令 $U(n)=U\left(p^\alpha\right)=\alpha p$. 于是由函数 $Z(n)$ 及 $U(n)$ 的定义可知 αp 是最小的正整数使得 n 满足下面的整除式

$$n\mid\frac{\alpha p(\alpha p+1)}{2},\quad p^\alpha\mid n \tag{1}$$

现在我们证明在 (1) 式中 $\alpha=1$. 事实上如果 $\alpha>1$, 则由 $p^\alpha\mid n$ 立刻推出

$$p^\alpha\mid\frac{\alpha p(\alpha p+1)}{2} \tag{2}$$

由于 $(p,\ \alpha p+1)=1$, 所以由上式立刻推出 $p^{\alpha-1}\mid\alpha$. 当 p 为奇素数时显然 (2) 式是不可能的, 因为此时 $p^{\alpha-1}>\alpha$, 与 $p^{\alpha-1}\mid\alpha$ 矛盾. 当 $p=2$ 时, 推出 $\alpha=2$. 这时 (2) 式成为 $4|\frac{4\times5}{2}=10$, 矛盾！所以在 (1) 式中一定有 $\alpha=1$ 且 p 为奇素数. 此时可设 $n=p\cdot m$. 则由 (1) 式可推出 $p\cdot m\mid\frac{p(p+1)}{2}$, 即就是 $m\mid\frac{p+1}{2}$. 显然 $m\neq1$. 否则 $n=p$, $Z(p)=p-1$, $U(p)=p$ 与 $Z(n)=U(n)$ 矛盾！而当 $n=p\cdot m$, m 为 $\frac{p+1}{2}$ 的任意大于 1 的因数时, $Z(n)=p$, $U(n)=p$,

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

所以一定有 $Z(n) = U(n)$. 从而推出 $n > 1$ 且满足方程 $Z(n) = U(n)$ 当且仅当 $n = p\cdot m$, m 为 $\frac{p+1}{2}$ 的任意大于 1 的因数. 于是完成了定理 1 的证明.

现在我们证明定理 2. 显然 $n = 1$ 不满足方程 $Z(n)+1 = U(n)$. 于是不妨设 $n > 2$ 且满足方程 $Z(n)+1 = U(n)$, 并令 $U(n) = U(p^\alpha) = \alpha p$. 于是由 $Z(n)+1 = U(n)$ 可得 $Z(n) = \alpha p - 1$. 再由函数 $Z(n)$ 及 $U(n)$ 的定义可推出

$$n \mid \frac{\alpha p(\alpha p-1)}{2}, \quad p^\alpha \mid n \tag{3}$$

由于 $(p,\ \alpha p-1) = 1$, 所以由 (3) 式立刻推出 $p^{\alpha-1} \mid \alpha$. 从而利用证明定理 1 的分析过程不难推出 $\alpha = 1$ 且 p 为奇素数. 所以可设 $n = p\cdot m$. 再利用 (3) 式不难推出 $m \mid \frac{p-1}{2}$. 而当 $n = p\cdot m$, m 为 $\frac{p-1}{2}$ 的任意正因数时, 容易验证 n 满足方程 $Z(n)+1 = U(n)$. 所以方程 $Z(n)+1 = U(n)$ 成立当且仅当 $n = p\cdot m$, m 为 $\frac{p-1}{2}$ 的任意正因数. 于是完成了定理 2 的证明.

参 考 文 献

[1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions [M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] David Gorski. The pseudo Smarandache functions [J]. Smarandache Notions Journal, 2000, 12:140-145.

[3] Le Maohua. Two function equations [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14:180-182.

[4] Jozsef Sandor. On a dual of the pseudo-Smarandache function [J]. Smarandache Notions (Book series), 2002, 13:16-23.

[5] 沈虹. 一个新的数论函数及其它的值分布 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23(2):235-238.

[6] Jozsef Sandor. On additive analogues of certain arithmetic function [J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14:128-132.

[7] Kenichiro Kashihara. Comments and topics on Smarandache notions and problems [M]. USA: Erhus University Press, 1996.

[8] 张文鹏. 初等数论 [M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2007.

[9] 潘承洞, 潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

An equation involving the Pseudo-Smarandache function and the Smarandache multiplicative function

YAN Xiao-xia

(Hanzhong Vocational and Technical College, Hanzhong 723000, China)

Abstract: For any positive integer n, the famous Pseudo-Smarandache function $Z(n)$ is defined as the smallest positive integer m such that n divides $\frac{m(m+1)}{2}$, or $Z(n) = \min\{m:\ m\in\mathbb{N},\ n \mid \frac{m(m+1)}{2}\}$, where $\mathbb{N}$ denotes the set of all positive integers. The Smarandache multiplicative function $U(n)$ is defined as $U(1) = 1$. If $n > 1$ and $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ denotes the factorization of n into prime powers, then $U(n) = \max\{\alpha_1 p_1,\ \alpha_2 p_2,\ \cdots,\ \alpha_s p_s\}$. The main purpose of this paper is using the elementary methods to study the solutions of the equation $Z(n) = U(n)$ and $Z(n)+1 = U(n)$, and give their all positive integer solutions.

Keywords: Pseudo-Smarandache function, Smarandache multiplicative function, equation, positive integer solution

2000MSC: 11B83

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net